Nº orden: 274

Hoja 1	Ejercicio 1	Eric Brandwein

a) Todo K_n tiene camino hamiltoniano, ya que para cualquier n puedo tomar la secuencia de ~~aristas~~ nodos $v_1, v_2, ..., v_n$ que no repetirá nodos, los recorrerá a todos los de K_n, y, como todas las combinaciones posibles de dos nodos diferentes en K_n representan las aristas de K_n, las aristas que conectan a cada nodo v_i con v_{i+1}, con $i \in [1, n]$, $i \in \mathbb{Z}$, pertenecerán a K_n.

b) Todo W_n tiene camino hamiltoniano. Llamemos w al vértice universal, y $v_1, ..., v_n$ a los vértices del ciclo original, con v_i y v_{i+1} adyacentes, y v_1 y v_n también. Podemos construir el camino que recorre todos los vértices del grafo que corresponda a la secuencia $w, v_1, ..., v_n$, y no repetirá vértices. Sabemos que, como w es universal, la arista (w, v_1) existe en el grafo, y entonces describimos un camino hamiltoniano.

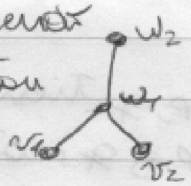
c) $K_{p,q}$ tiene camino hamiltoniano si y sólo si $p \in [q-1, q+1]$, con p y q naturales. Por lo visto en clase, sabemos que cualquier camino en un grafo bipartito será tal que intercale nodos de las dos partes. Dicho de otro modo, ~~el camino~~ ~~[illegible]~~, si llamamos W y V a las ~~particiones~~ partes, y w_i y v_j a nodos ~~[illegible]~~ cualquiera de esas partes, el camino se podrá representar como $w_i, v_j, w_k, v_l, ...$ Como lo que deseamos encontrar es un camino hamiltoniano, los vértices del mismo no se podrán repetir. Entonces, si tuviésemos en una de las partes por lo menos dos más vértices que en la otra, será imposible armar el camino intercalado que recorra todos los vértices.

Nos queda ahora ver que existe un camino hamiltoniano si la diferencia de las partes es menor o igual a 1. Para lograrlo, lo construiremos. Comenzando por un nodo de la parte con mayor

cantidad, que llamaremos w_1, pasamos a un nodo no visitados de la otra parte, que llamaremos v_1, y así sucesivamente. Nos quedará un camino de la forma $w_1, v_1, w_2, v_2, \ldots, v_q, w_p$. Dependiendo de si $p > q$ o no, el último nodo pertenecerá a W o a V. Así, recorrimos todos los nodos de W y de V intercaladamente, sin repetir ninguno, y siempre utilizando aristas pertenecientes a $K_{p,q}$, ya que para todo v, w pertenecientes a partes diferentes la arista que los une pertenece a $K_{p,q}$. Por lo tanto, obtuvimos un camino hamiltoniano.

d) Solamente si $h \leq 1$ habrá camino hamiltoniano. Separaremos por casos:

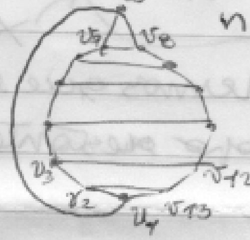
- Si $h=0$: El árbol es el grafo trivial, cuyo camino hamiltoniano es v_1.
- Si $h=1$: Si llamamos a la raíz w y a sus dos hijos v_1 y v_2, podremos armar el camino hamiltoniano v_1, w, v_2.
- Si $h \geq 1$: En alguna parte del grafo tendremos un subgrafo isomorfo al de la figura, con v_1 y v_2 siendo dos hojas. Como las únicas aristas que conectan con v_1 y v_2 son (w, v_1) y (w, v_2) respectivamente, las dos deberán pertenecer al camino hamiltoniano.



Como w_2 debe ~~pertenecer~~ ser también alcanzado por el camino hamiltoniano, y entre dos nodos del camino debe haber un camino contenido en el camino hamiltoniano, la arista (w_2, w_1) también debe pertenecer al camino, ya que todo camino entre w_2 y w_1 contendrá a esa arista, por tratarse de un árbol. Para entonces nuestro camino tiene ~~un nodo~~ tres aristas que inciden sobre el mismo nodo, cosa que no es posible en un camino hamiltoniano. Por ende, este tipo de grafos no tiene camino hamiltoniano.

a) Sabemos que $n \geq 4$, ya que ningún vértice puede ser adyacente a otros tres si no hay otros ~~tres~~ tres. Además, sabemos que n debe ser par, ya que de otra forma la suma de los grados daría impar. Como $m = \left(\sum_{v \in V} d(v)\right)/2$, y $m \in \mathbb{Z}$, la suma ~~...~~ debe ser par.

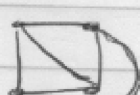
Ahora, para todo $n \geq 4$ par, construiremos un grafo planar 3-regular. Tomaremos el ciclo simple de $n-1$ nodos, que es planar. Llamaremos a los nodos "consecutivamente" v_1 a v_{n-1}, cuyo grado es 2. Luego, agregaremos el nodo w, con aristas que lo conectan a v_1 y a $v_{n/2}$ y $v_{(n/2+1)}$. Como $n \geq 4$, estos 3 son diferentes nodos, y el grafo sigue siendo planar, como se muestra en la figura. Ahora, tanto w como v_1, $v_{n/2}$ y $v_{(n/2)+1}$ tienen grado 3. Nos falta sumarle uno al grado de los nodos restantes del ciclo. Como ya agotamos una cantidad impar de nodos del ciclo impar, nos queda una cantidad par de nodos. A éstos los conectamos como muestra la figura: el $v_{n-\overset{1}{2}}$ con el v_2, el $v_{n-\overset{2}{3}}$ con el v_3, y así. En general, el $v_{n-\overset{+1}{i}}$ con el v_i, con $i > 1$ y $i \neq n/2$. Ahora, el grado de cada uno de estos nodos es 3, y el grafo sigue siendo planar. Así, vemos que para todo n par mayor o igual a 4 se cumple lo pedido.



$n = 14$

b) Para esto, deberemos exhibir los de 4 vértices y los de 6 vértices.

- $n=4$: Existe uno solo, que es el K_4, cuya representación planar es:

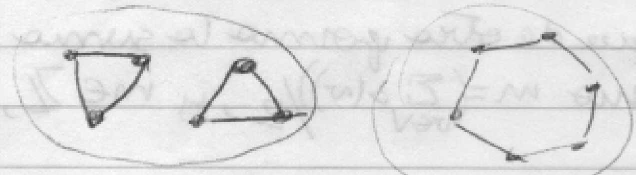


¿por qué es único?

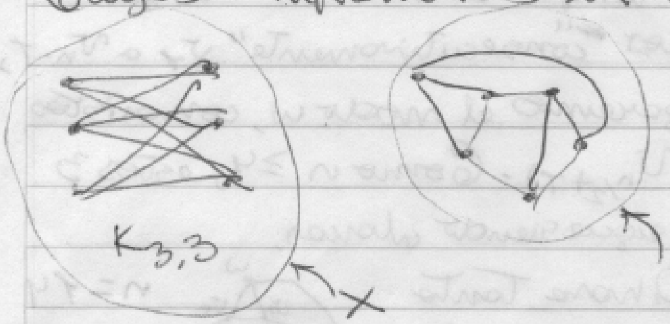
¿por qué?

- $n=6$: Exponer todos los grafos pedidos es lo mismo que exponer los complementos de los grafos 2-regulares de 6 vértices y tomar solamente los planares. ~~...~~ Como el grado de todos los vértices ~~...~~ ahora será par, por lo visto en clase, cada componente

mente conexa tendrá un circuito euleriano, y entonces será posible particionar cada una en ciclos simples. Como cada nodo tendrá solamente ~~de vértices~~ grado dos, pertenecerá a un solo ciclo simple. Con estas condiciones, los grafos que nos quedan son:



Cuyos complementos son isomorfos a:



Sabemos que el $K_{3,3}$ no es planar, y entonces el único grafo restante es el que cumple todo lo pedido.

Nº orden: 274

Hoja 3	Ejercicio 3	Eric Brandwein

Para demostrar que $\Pi_1 \in$ NP-completo, veremos que $\Pi_1 \in$ NP-hard y que $\Pi_1 \in$ NP. Para ver que $\Pi_1 \in$ NP-hard, demostraremos que Π_2 puede ser reducido polinomialmente a Π_1, dando la reducción que transformará instancias de Π_2 a Π_1.

Podemos recordar de lo visto en clase que un grafo completo de k nodos contiene a subgrafos isomorfos a los completos de j nodos, con $j \leq k$. Por ende, decidir si un grafo contiene como subgrafo a un completo de por lo menos k nodos es lo mismo que decidir si contiene a ~~uno~~ de exactamente k nodos. Y, a su vez, esto es lo mismo que decidir si tiene un subgrafo isomorfo al grafo completo de k nodos. Por lo tanto, armamos la reducción $f: Dom(\Pi_2) \rightarrow Dom(\Pi_1)$ como

$$f(G, k) = (G, \{\text{grafo completo de } k \text{ vértices}\}),$$

la decisión de la instancia (G, k) de Π_2 será la misma que la de la instancia $f(G, k)$ de Π_1, si es que se trata de una reducción válida. Para ver esto, solamente debemos corroborar que la reducción no se sale del dominio de Π_1, y que acepta cualquier instancia del dominio de Π_2. Como el dominio de Π_1 son todos los pares de grafos, y tanto G como el completo de k vértices, con $1 \leq k \leq n$, $k \in \mathbb{Z}$, son grafos válidos, la reducción no se sale de su dominio. Además, la reducción acepta cualquier instancia de Π_2, ya que ninguna operación que realiza le restringe el dominio. La reducción es entonces válida.

Para corroborar que es también útil, debemos ver que es polinomial. La parte de convertir a G en sí mismo es directa, y entonces nos queda la parte de convertir a k en el grafo completo de k vértices. Esto se logra con el siguiente pseudocódigo:

```
grafo = (∅,∅)
for i ∈ [1..k]:
    vértices(grafo) += v_i
endfor
for i ∈ [1..k]:
    ~~aristas(grafo~~
    for j ∈ (i..k]:
        aristas (grafo) += (v_i, v_j)
    endfor
endfor
```

Este ~~código~~ pseudocódigo agrega al grafo ~~nodo~~ k nodos, y conecta a todos entre sí con aristas. Como $k \leq n$, esta parte tiene complejidad $O(n^2)$, por sus dos bucles anidados. Uniendo las dos partes polinomiales de la reducción, llegamos a la conclusión ~~de~~ que la reducción es polinomial, con lo que llegamos a que Π_1 es NP-hard.

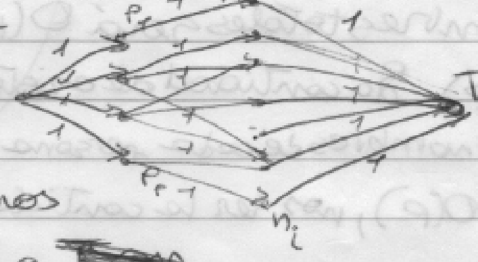
Para ver que $\Pi_1 \in NP$, definiremos una manera polinomial de corroborar que un certificado de instancia con decisión "sí" es correcto. El certificado elegido contendrá la instancia del problema ~~g~~, la ~~lista~~ ~~función de ...~~ lista L de nodos de G que pertenecen al subgrafo isomorfo a H, y la función f que le asigna a cada uno de estos nodos un nodo de H para conseguir el isomorfismo. Lo que hará nuestro algoritmo será recorrer L, y por cada nodo v comprobar que sus adyacentes correspondan por medio de f a los adyacentes de f(v) en H. Como $|L| \leq n$, la cantidad de nodos adyacentes a otro es $\leq n-1$, y comprobar que las dos listas de adyacentes se corresponden es polinomial ~~(por ejemplo ordenando las listas)~~ en la cantidad de elementos, nuestro algoritmo es polinomial con respecto a n.

$\Pi_1 \in$ NP-hard y $\Pi_1 \in NP \Rightarrow \Pi_1 \in$ NP-completo

Nº orden: 274

Hoja 4	Ejercicio 4	Eric Brandwein

a) Representaremos el problema como un problema de flujo máximo. Tendremos un nodo por cada persona, un nodo por cada nombre poseído por alguna persona, un nodo S productor y un nodo T consumidor. Conectaremos a S con cada nodo de persona p, a ~~cada~~ cada nodo de nombre n con T, y a cada nodo p con cada nodo de ~~no~~nombre, si es que la persona tiene ese nombre. La figura muestra un ejemplo. Todas las aristas de la red tendrán capacidad 1.



Para ver que la elección de nombres es posible, correremos un algoritmo de flujo máximo sobre esta red, y luego nos fijaremos si el flujo máximo es igual a la cantidad de personas. Si nuestro algoritmo resuelve que esto se cumple, entonces querrá decir que cada arista de S a un nodo p tiene flujo 1, ya que la suma del flujo saliente de S menos la suma del entrante debe ser igual al total, y no hay aristas entrantes a S. Además, esto quiere decir que existe un flujo en el que cada nodo de persona tiene una sola arista saliente con flujo 1, ya que las capacidades son enteras. A su vez, cada arista saliente de un nodo de persona está conectada con uno de nombre, el que ~~s~~ puede recibir como máximo flujo 1 para que la ley de conservación de flujo se cumpla. Podemos luego imaginar a las aristas ~~de~~ que "transportan" el flujo de los nodos p a los n en este flujo como la asignación de personas a ~~no~~nombres, en la que no se repiten nombres ~~en el hecho~~ para dos personas.

Si nuestro algoritmo decide que no se cumple lo deseado, entonces no habrá un flujo que se corresponda con una asignación de nombres, y entonces no se podrá cumplir para este conjunto de personas lo pedido. ¿por qué?

Es cierto pero hasta ahora no sabemos a ningún algoritmo específico lo encuentra

requiere cap enteras y grafo conexo. requiere p entero

Elegiremos el algoritmo de flujo máximo a utilizar según la complejidad de cada uno. Primero determinaremos los datos de nuestra red. Su cantidad de nodos es $p + \#nombres + 2$. Sabemos que cada persona tiene $O(1)$ nombres, así que la cantidad de nombres totales será $O(p)$. La cantidad de nodos es entonces $O(p)$. La cantidad de aristas es $O(p$ (S→cada persona) + #nombres(cada nombre→T) + #nombres de cada persona $\times p)$. Otra vez, la cantidad de aristas es $O(p)$, por ser la cantidad de ~~nodos~~ nombres de cada persona $O(1)$.

No, U es una cota por cap(e)

Los algoritmos a comparar serán los de Ford-Fulkerson y Edmonds-Karp. Sus complejidades son $O(n.m.U)$ y $O(n.m^2)$ respectivamente. Sabemos que U = flujo máximo $\leq p$. Así, las complejidades nos quedan $O(p.p.p)$ y $O(p.p^2)$, que son iguales. Para elegir alguno, elegimos el de Ford-Fulkerson. ¿por qué?

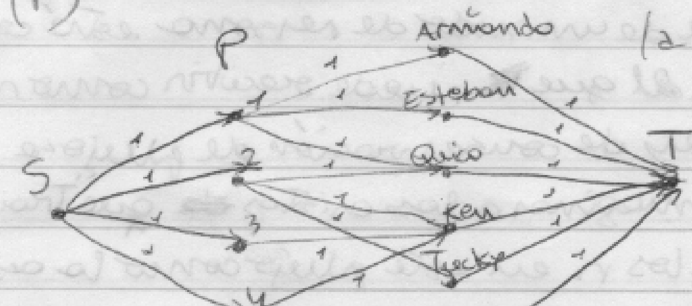
FFEK también es $O(mnU)$

La complejidad total será la suma de la complejidad del algoritmo de flujo máximo más la del algoritmo que construye ~~la~~ red, más la complejidad $O(1)$ de corroborar que el flujo máximo $= p$. Si utilizamos una lista de adyacencias para la red, podemos armarla en $O(n+m) = O(p+p) = O(p)$. La complejidad total será $O(p) + O(p^3) = O(p^3)$. El algoritmo debe elegir nombres.

Es $O(p^2)$

Además, cuánto cuesta encontrar los nombres en la lista de nombres distintos?

b)



La red construida se verá como en la figura, con los flujos de cada arista en 0. El algoritmo de Ford-Fulkerson comenzará eligiendo un camino de aumento entre S y T sobre la red residual, que es una red ~~creada de esta manera~~ con los mismos nodos que la original, pero las aristas creadas de esta manera:

- Si la arista está saturada, se agrega la que va en dirección contraria con ~~flujo igual a~~ valor 0. No
- Si la arista tiene flujo 0, se agrega la misma con valor 0. No

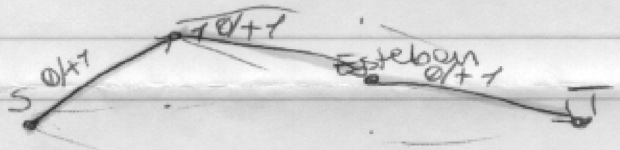
Nº orden: 274

Hoja 3	Ejercicio 4 (cont.)	Eric Brandwein

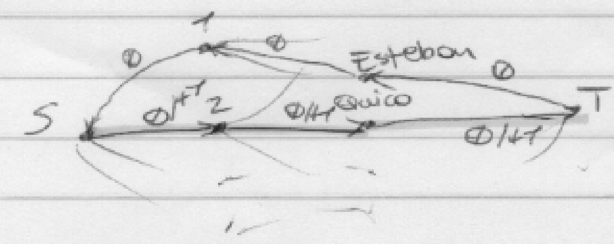
No debiste capacidades para esas aristas

• Si la arista tiene flujo entre 0 y su capacidad, se agrega la misma con valor igual a su flujo, y la contraria con valor igual a su capacidad menos su flujo. No

El camino de aumento es uno cualquiera entre S y T en la nueva red. De ahí, se obtiene la arista del camino tal que la capacidad de esa arista menos su valor sea mínimo en el camino, y se suma ese valor a todas las aristas del camino. Luego, en la red original, se transmiten estos nuevos valores a las aristas correspondientes, ?
~~invirtiendo restándoles o sumándoles el flujo de la arista~~
restando o sumando el valor mínimo conseguido al flujo de cada arista dependiendo de si la correspondiente había sido invertida o no. En nuestro ejemplo, podría ser algo así:



tal que el nuevo flujo tendría 1 en las aristas marcadas. Podría seguir en la próxima iteración así:



Como se puede ver, en la red residual se invirtieron las aristas que se habían elegido anteriormente, y se eligió otro camino de aumento. Luego de p iteraciones, el algoritmo debería llegar a un flujo máximo de valor p, ya que esta red lo permite. ~~Así~~, y, como el valor es igual a p, se pueden distribuir los nombres entre las personas según nuestro algoritmo

El algoritmo debe devolver una asignación de nombre

Nº orden: 274

Hoja 6	Ejercicio 3	Eric Blondwein
	¿cuándo/dónde?	

a) Por lo visto en clase, sabemos que cada componente conexa de $H = (V, M_1 \cup M_2)$, siendo M_1 y M_2 dos correspondencias del grafo G, será

- nodo aislado ó
- circuito simple ó
- camino simple.

Como cada uno de estos componentes es planar, el grafo total es planar.

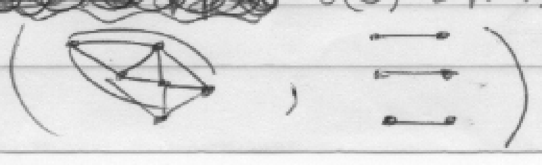
b) Sea E la partición de las aristas de G' en grafos planares tal que $t(G') = |E|$. Si de cada E_i sacamos las aristas cuyos nodos no pertenecen los dos a G, tendremos una partición de las aristas de G en grafos planares, ya que en E se deben encontrar todas las aristas de G', y un subgrafo de un grafo planar es obligatoriamente planar. Como encontramos una partición de G en grafos planares con cantidad de elementos igual a $t(G')$, la mínima partición tendrá menos o igual elementos, y entonces $t(G) \leq t(G')$.

c) Demostraremos por inducción que los K_n con $n \geq 5$ cumplen lo pedido. Con esto, como cualquier grafo de n vértices es subgrafo de K_n, y gracias al punto b), podremos decir que cualquier grafo ~~...~~ no planar lo cumple, dado que no hay grafos no planares de menos de 5 vértices.

Casos base: K_5. $t(G) = 2$, $\lceil (n-2)/2 \rceil = \lceil (5-2)/2 \rceil = \lceil 1,5 \rceil = 2$, $t(G) \leq 2$.
Es un caso base porque el K_5 es el grafo no planar con menos vértices.

K_6. $t(G) = 2$, $\lceil (n-2)/2 \rceil = \lceil (6-2)/2 \rceil = 2$, $t(G) \leq 2$

$t(G) = 2$ porque se puede partir el K_6 así:



, como recomienda el enunciado.

Paso Inductivo: Queremos ver que, asumiendo que K_{n-2} es no planar y $t(K_{n-2}) \le \lceil \frac{n-4}{2} \rceil$, $t(K_n) \le \lceil \frac{n-2}{2} \rceil$, con $n > 6, n \in \mathbb{Z}$

Siguiendo la sugerencia del enunciado, partimos K_n en dos: el grafo $H = C_{n-2} + 2K_1$ y el grafo $K_n - E(H)$.

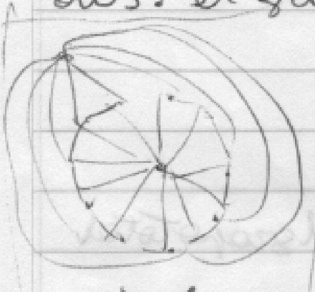


Fig. 1

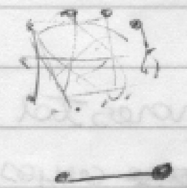


Fig. 2

H siempre se puede representar como en la figura 1, y por lo tanto es planar. $K_n - E(H)$ queda entonces en una forma parecida a la figura 2, que es un K_2 separado de un subgrafo de K_{n-2}. Si usamos H como una de nuestras partes en la partición de K_n en subgrafos planares, obtenemos que $t(K_n) \le 1 + t(K_n - E(H))$. Como en $K_n - E(H)$ tenemos un subgrafo de un K_{n-2}, y en otra componente conexa un K_2 (cuyo $t()$ es igual a 1), podemos partir a la otra componente en subgrafos planares, y sumarle a alguno el K_2 restante, y no dejaría de ser planar esa parte. Como la partición no es vacía, siempre existirá una parte a la que sumar el K_2. Entonces, $t(K_n - E(H)) \le t(K_{n-2}) \le \lceil \frac{n-2-2}{2} \rceil = \lceil \frac{n-4}{2} \rceil$. Reemplazando, nos queda que $t(K_n) \le 1 + \lceil \frac{n-4}{2} \rceil = \lceil 1 + \frac{n-4}{2} \rceil = \lceil \frac{2+n-4}{2} \rceil = \lceil \frac{n-2}{2} \rceil$, que es a lo que queríamos llegar.